CPI 2/S4

Exercice 1

Deux pièces (une chambre et la salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'exterrieur. Une guèpe initiallement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ son trajet obéit aux règles suivantes :

— Lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n, alors au temps $n+1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$.

— Lorsqu'elle est en B au temps n, alors au temps $n+1$ elle retourne en A avec une proabbilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$.

— Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier n, on notera A_n l'événement "la guèpe est dans la pièce A à l'instant n " et de même B_n.

D_n pour "être dehors à l'instant n " et S_n l'événement "la guèpe sort à l'instant n".

On notera a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. (a) Déterminer les probabilités a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1 et s_2.

   (b) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1?

   (c) Justifier que pour tout entier n :

   $$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \text{ et } B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$

   et en déduire pour tout entier n, les relations de récurrence suivantes :

   $$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + \tfrac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{2}{3}a_n + \tfrac{1}{2}b_n$$

   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.

   (e) En déduire pour $n \geq 1$, l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.

   (f) Calculer les limites de a_n et de b_n quand n tend vers $+\infty$ et interprèter ce résultat.

2. (a) Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$ et en déduire s_n en fonction de n.

   (b) Déterminer la probabilité que la guèpe soit dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)

Exercice 2

Les produits référencés $X,\ Y$ et Z se partagent le marché. un consommateur n'utilisera qu'un seul de ces produits chaque mois. On note x_n, y_n et z_n, la proababilité qu'il utilise les produits $X,\ Y$ et Z au $n^{ième}$ mois, où n est un entier naturel.

On observe les données suivantes : $x_0 = 0,1, y_0 = 0,2$ et $z_0 = 0,7$.

Par ailleurs des sondages ont permis de déterminer les intentions des consommateurs supposées constantes :

— Utilisant le produit X un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $40\%,\ 30\%$ et 30%

— Utilisant le produit Y un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $30\%,\ 40\%$ et 30%

— Utilisant le produit Z un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $20\%,\ 10\%$ et 70%

1. Exprimer $x_{n+1},\ y_{n+1}$et z_{n+1} en fonction de $x_n,\ y_n$et z_n.
2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

   Exprimer z_n en fonction de $y_n$et $x_n$et en déduire que l'on a pour tout entier n :

   $U_{n+1} = A.U_n + B$

3. Déterminer une matrice colonne C telle que : $C = A.C + B$.
4. On considère la matrice $V_n = U_n - C$.
   Démontrer que pour tout entier n : $V_{n+1} = A.V_n$ puis en déduire V_n en fonction de V_0.
5. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$;
   (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
6. (a) En déduire les valeurs de $x_n$et y_n en fonction de n.
   (b) En déduire z_n en fonction de n.
   (c) Quelle sont à long terme les probabilités d'utiliser les produits X, et Z ?

Exercice 3

On considère deux urnes :
— une urne verte contenant une boule rouge et 3 boules vertes
— une urne rouge contenant deux boules rouges et deux vertes.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la façon suivante :
— le premier tirage est effectué dans l'urne verte
— à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précédent.

Pour tout entier n non nul, on notera V_n le fait d'obtenir une boule verte lors du $n^{iéme}$ tirage, v_n sa probabilité et $\mathcal{V}_n$ le fait de l'effectuer dans l'urne verte -de même pour rouge-.

1. Les trois premiers tirages
   Déterminer la probabilité d'obtenir
   (a) la première boule verte au troisième tirage.
   (b) la première boule rouge au troisième tirage.
   (c) au moins une boule verte dans les trois premiers tirages.
   (d) une seule boule rouge lors des trois premiers tirages.
2. Les deux premiers tirages
   (a) Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?
   (c) On a obtenu une boule verte au second tirage.
   Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?
3. Le $n^{iéme}$ tirage
   (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et de r_n
   (b) En déduire que $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}$, puis l'expression de v_n en fonction de n

Exercice 1

Les produits référencés $X,\ Y$ et Z se partagent le marché. un consommateur n'utilisera qu'un seul de ces produits chaque mois. On note x_n, y_n et z_n, la proabablilité qu'il utilise les produits $X,\ Y$ et Z au $n^{ième}$ mois, où n est un entier naturel.

On observe les données suivantes : $x_0 = 0,1, y_0 = 0,2$ et $z_0 = 0,7$.

Par ailleurs des sondages ont permis de déterminer les intentions des consommateurs supposées constantes :

— Utilisant le produit X un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $40\%,\ 30\%$ et 30%

— Utilisant le produit Y un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $30\%,\ 40\%$ et 30%

— Utilisant le produit Z un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits X, Y et Z le mois suivant sont respectivement de : $20\%,\ 10\%$ et 70%

1. Exprimer $x_{n+1},\ y_{n+1}$et z_{n+1} en fonction de $x_n,\ y_n$et z_n.
2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

   Exprimer z_n en fonction de $y_n$et $x_n$et en déduire que l'on a pour tout entier n :
   $U_{n+1} = A.U_n + B$
3. Déterminer une matrice colonne C telle que : $C = A.C + B$.
4. On considère la matrice $V_n = U_n - C$.

   Démontrer que pour tout entier n : $V_{n+1} = A.V_n$ puis en déduire V_n en fonction de V_0.
5. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Calculer $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$;

   (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
6. (a) En déduire les valeurs de $x_n$et y_n en fonction de n.

   (b) En déduire z_n en fonction de n.

   (c) Quelle sont à long terme les probabilités d'utiliser les produits $X,$ et Z ?

Exercice 1

1. (a) $a_0 = p(A_0) = 1$ car elle est en A à l'instant 0.

   $b_0 = 0$ et $s_0 = 0$ pour la même raison.

   $a_1 = p(A_1) = 1/3$ car elle était en A à l'instant 0.

   $b_1 = 2/3$ et $s_1 = 0$ car elle ne peut pas sortit avant l'instant 2.

   $s_2 = p(S_2) = p(A_0 \cap B_1 \cap D_2) = p(A_0) \cdot p(B_1/A_0) \cdot p(D_2/A_0 \cap B_1) = 1 \cdot 2/3 \cdot 1/4 = 1/6$

   (b) On demande
$$p(B_1/A_2) = \frac{p(B_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(B_1)\, p(A_2/B_1)}{p(A_2)}$$
   Comme (A_1, B_1) est un système complet d'événements,
$$p(A_2) = p(B_1)\, p(A_2/B_1) + p(A_1)\, p(A_2/A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$
   et
$$p(B_1/A_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

   (c) Pour être en A à l'instant $n+1$ elle pouvait être en A ou en B à l'instant précédent. donc $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1})$ et de la même façon $B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$.

   Comme les $(A_n \cap A_{n+1})$ et $(B_n \cap A_{n+1})$ sont incompatibles,
$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = p(A_n)\, p(A_{n+1}/A_n) + p(B_n)\, p(A_{n+1}/B_n) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$
   et de la même façon $b_{n+1} = \dfrac{2}{3} a_n + \dfrac{1}{2} b_n$.

2. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n = 2\left(\frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n\right) = 2a_{n+1}$$
   . Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$. (en substituant n à $n+1$)

   (b) On a alors : pour tout entier $n \geq 1$,
$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} 2a_n = \frac{5}{6} a_n$$
   donc a est une suite géométrique de raison 5/6 et de premier terme $a_1 = 1/3$ donc
$$a_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \cdot \frac{2}{5} \text{ pour } n \geq 1$$
   et donc $b_n = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

   (c) Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, b_n et a_n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la guèpe finira par se retrouver dehors.

3. (a) La guèpe "sort" si l'instant d'avant elle était en B et que l'"instant d'après elle est dehors.

   Donc à partir de l'instant $n = 2$,
$$s_n = p(S_n) = p(B_{n-1} \cap S_n) = p(B_{n-1}) \cdot p(S_n/B_{n-1}) = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 6\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(b) La guèpe est dehors à l'instant 10 si elle sort entre l'instant 2 et10.

Donc

$$D_{10}=\bigcup_{k=2}^{10}S_k \text{ et } p(D_{10})=\sum_{k=2}^{10}p(S_k)=\sum_{k=2}^{10}6\left(\frac{5}{6}\right)^k=6\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^k$$
$$p(D_{10})=6\sum_{k=0}^{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{k+2}=5\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^8-1}{\frac{5}{6}-1}=\frac{5^3}{6}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^8\right)$$

ou plus simplement, elle est dehors si elle n'est ni en A ni en B et $D_{10}=\overline{A_{10}\cup B_{10}}$

Exercice 2

1. Comme utliser les porduits X, Y ou Z le $n^{ième}$ mois forme un système complet d'événements alors

$$\begin{aligned}p(X_{n+1}) &= p(X_{n+1}/X_n)p(X_n)+p(X_{n+1}/Y_n)p(Y_n)\\ &\quad +p(X_{n+1}/Z_n)p(Z_n)\\ &= 0,4p(X_n)+0,3p(Y_n)+0,2p(Z_n)\end{aligned}$$

donc $x_{n+1}=0,4x_n+0,3y_n+0,2z_n$ et de même $y_{n+1}=0,3x_n+0,4y_n+0,1z_n$ et $z_{n+1}=0,3x_n+0,3y_n+0,7z_n$

2. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0,2&0,1\\0,2&0,3\end{pmatrix}$, $U_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0,2\\0,1\end{pmatrix}$.

   Comme les choix de X, Y et Z sont exclusifs, on a $p(X_n)+p(Y_n)+p(Z_n)=1$ donc $z_n=1-x_n-y_n$

   Donc $x_{n+1}=0,4x_n+0,3y_n+0,2(1-x_n-y_n)=0,2+0,2x_n+0,1y_n$

   et $y_{n+1}=0,3x_n+0,4y_n+0,1(1-x_n-y_n)=0,1+0,2x_n+0,3y_n$

   D'où

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0,2+0,2x_n+0,1y_n\\0,1+0,2x_n+0,3y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2\\0,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,2x_n+0,1y_n\\0,2x_n+0,3y_n\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0,2\\0,1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,2&0,1\\0,2&0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

   et pour tout entier n : $U_{n+1}=A.U_n+B$

3. On cherche la colonne C par ses composantes : $C=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

   $C=A.C+B\iff(I-A)C=B\iff\begin{pmatrix}0,8&-0,1\\-0,2&0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2\\0,1\end{pmatrix}$

   $\iff\begin{cases}8x-y=2 & L1+4L2\\-2x+7y=1\end{cases}\iff\begin{cases}27y=6\\-2x+7y=1\end{cases}\iff\begin{cases}y=2/9\\x=5/18\end{cases}$

   Donc la colonne $C=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ convient (et c'est la seule)

4. On considère la matrice $V_n=U_n-C$.

   On a $V_{n+1}=U_{n+1}-C=AU_n+B-(AC+B)=AU_n-AC=A(U_n-C)=AV_n$

   Donc la suite V est géométrique matricielle de raison A et $V_n=A^nV_0$

5. (a) On applique la méthode de Gauss :

   $\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&2&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_1+L_2\end{matrix}\iff\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&3&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1-L_2/3\\L_2/3\end{matrix}\iff\begin{pmatrix}1&0&2/3&-1/3\\0&1&1/3&1/3\end{pmatrix}$

   Donc P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

   (b) On a $D=P^{-1}\cdot A\cdot P=\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix}3&0\\0&12\end{pmatrix}$

   donc $D=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

(c) On a donc $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$
Comme D est diagonale, $D^n = \frac{1}{10^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3 \cdot 10^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 10^n}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\times 4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. (a) On a alors $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = U_n = V_n + C = A^nV_0 + C$
avec $V_0 = U_0 - C = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient :
$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{45}\frac{1}{3 \cdot 10^n}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\times 4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
d'où $x_n = -\frac{1}{45}\frac{5+3\times 4^n}{10^n} + \frac{5}{18}$ et $y_n = \frac{1}{45}\frac{-5+6\times 4^n}{10^n} + \frac{2}{9}$
(b) enfin $z_n = 1 - x_n - y_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{45}\frac{5+3\times 4^n}{10^n} - \frac{1}{45}\frac{-5+6\times 4^n}{10^n}$
(c) Et quand n tend vers $+\infty$ (à long terme) on a $x_n \to 5/18$: $y_n \to 2/9$ et $z_n \to 1/2$

Exercice 3

On considère deux urnes :
— une urne verte contenant une boule rouge et 3 boules vertes
— une urne rouge contenant deux boules rouges et deux vertes.
On effectue une suite de tirages d'une boule de la façon suivante :
— le premier tirage est effectué dans l'urne verte
— à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule obtenue au tirage précédent.
Pour tout entier n non nul, on notera V_n le fait d'obtenir une boule verte lors du $n^{iéme}$ tirage, v_n sa probabilité et $\mathcal{V}_n$ le fait de l'effectuer dans l'urne verte -de même pour rouge-.

1. Les trois premiers tirages
Déterminer la probabilité d'obtenir

(a) $A =$"la première boule verte au troisième tirage".
C'est : "obtenir une verte au troisième et des rouges avant" = $R_1 \cap R_2 \cap V_3$
Donc $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}_{R_1}(R_2)\,\mathrm{P}_{R_1 \cap R_2}(V_3)$ l'interprétation du conditionnement précisant l'urne du tirage :
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_2}(R_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_3}(V_3)$ et les boules étant équiprobables
$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{1}$
(b) $B =$"première rouge au 3ème tirage"
Comme précédemment, seules les urnes changent :
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(V_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_2}(V_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_3}(R_3) = \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}$
(c) $C =$"au moins une boule verte dans les trois premiers tirages"
Plutôt que de décomposer l'événement (réunion puis crible) il est plus facile de passer par l'événement contraire :
$\bar{C} =$"aucune verte"="uniquement des rouges"$=R_1 \cap R_2 \cap R_3$
Donc $\mathrm{P}(\bar{C}) = \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_2}(R_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_3}(R_3) = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(C) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
(d) $D =$"une seule boule rouge lors des trois premiers tirages"
La première idée est de **compter** les boules rouges obtenues ... et d'espérer que la loi soit usuelle (binomiale ou Hypergéométrique) Mais ici, les tirages ne sont pas indépendants ni la probabilité de Rouge constante.
On en revient donc à la décomposition de l'événement :
$D = (R_1 \cap V_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap R_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap R_3)$

Les trois étant incompatibles, (on a soit pile soit face à une tirage donné) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(R_1 \cap V_2 \cap V_3) + \mathrm{P}(V_1 \cap R_2 \cap V_3) + \mathrm{P}(V_1 \cap V_2 \cap R_3) \\
&= \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}_{R_1}(V_2)\,\mathrm{P}_{R_1 \cap V_2}(V_3) + \dots \\
&= \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_2}(V_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_3}(V_3) + \mathrm{P}(V_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_2}(R_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_3}(V_3) + \mathrm{P}(V_1)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_2}(V_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{V}_3}(R_3) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4} = \frac{21}{64}
\end{aligned}$$

2. Les deux premiers tirages

   (a) Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir alors une boule verte au second tirage ?

   On cherche ici une probabilité conditionnelle... immédiate en interprétant : on fait le second tirage dans l'urne rouge.

   $\mathrm{P}_{R_1}(V_2) = \mathrm{P}_{\mathcal{R}_2}(V_2) = \frac{1}{2}$ car les boules de cette urne sont équiprobables.

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?

   On connaît les probabilités en conditionnant par le premier tirage.

   On utilise donc la formule des probabilités totales :

   (R_1, V_1) est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V_2) &= \mathrm{P}_{R_1}(V_2)\,\mathrm{P}(R_1) + \mathrm{P}_{V_1}(V_2)\,\mathrm{P}(V_1) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{3}{4} \\
&= \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

   (c) On a obtenu une boule verte au second tirage : le conditionnement.

   Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?

   Ici, on conditionne par la conséquence.

   On utilise donc la formule de Bayes :

$$\mathrm{P}_{V_2}(\mathcal{R}_2) = \frac{\mathrm{P}(V_2 \cap \mathcal{R}_2)}{\mathrm{P}(V_2)} = \frac{\mathrm{P}(\mathcal{R}_2)\,\mathrm{P}_{\mathcal{R}_2}(V_2)}{\mathrm{P}(V_2)}$$

   avec $\mathrm{P}(\mathcal{R}_2) = \mathrm{P}(R_1) = \frac{3}{4}$ et $\mathrm{P}(V_2) = \frac{11}{6}$ donc

$$\mathrm{P}_{V_2}(\mathcal{R}_2) = \frac{\frac{1}{4}\frac{1}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{3}{44}$$

3. Le $n^{iéme}$ tirage

   (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et de r_n

   On a $v_{n+1} = \mathrm{P}(V_{n+1})$ et on connaît seulement cette probabilité conditionnée par l'urne de tirage. On utilise donc la formule des probabilités totales :

   $(\mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{R}_{n+1})$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V_{n+1}) &= \mathrm{P}_{\mathcal{V}_{n+1}}(V_{n+1})\,\mathrm{P}(\mathcal{V}_{n+1}) + \mathrm{P}_{\mathcal{R}_{n+1}}(V_{n+1})\,\mathrm{P}(\mathcal{R}_{n+1}) \\
&= \frac{3}{4}\mathrm{P}(V_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(R_n) \\
&= \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{2}r_n
\end{aligned}$$

   Donc $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{2}r_n$

(b) Et comme $V_n = \overline{R_n}$ on a alors $r_n = 1 - v_n$ et $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + \frac{1}{2}\left(1 - v_n\right) = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}$,

Donc la suite v est arithmético-géométrique.

On détermine un réel c tel que $c = \frac{1}{4}c + \frac{1}{2} \iff \frac{3}{4}c = \frac{1}{2} \iff c = \frac{2}{3}$

Puis on défini la suite auxiliaire w par $w_n = v_n - c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

On a donc $w_{n+1} = v_{n+1} - c = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}c + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(v_n - c\right) = \frac{1}{4}w_n$

Suite qui est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - c = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

Donc $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = w_n + c = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$